

Workshop in Celestial Mechanics
in honor of Alain Albouy

Quelques remarques
à propos du problème de Kepler

Charles-Michel Marle

Sommaire

1. Introduction
2. Le problème de Kepler, notations, équations
3. Résolution du problème de Kepler
4. La régularisation de Moser
5. Une réinterprétation des résultats de Moser
6. Conclusion et développements possibles
7. Remerciements
8. Bibliographie

Je remercie les organisateurs de cet Atelier de Mécanique Céleste de m'avoir invité à faire un exposé.

My warmest thanks to the organizers of this workshop in Celestial Mechanics.

C'est une occasion de témoigner à Alain Albouy ma grande estime et mon amitié. J'en suis très heureux.

By inviting me to present this talk, they offered me the opportunity to express my deep esteem and my friendly feelings to Alain Albouy.

Alain Albouy connaît très bien le sujet dont je vais parler, le problème de Kepler : c'est lui qui m'a fait connaître les importants travaux de Györgyi, que j'ai trouvé particulièrement difficiles à lire !

Alain Albouy knows perfectly the subject of my talk, the Kepler problem : I owe him the knowledge of the works of Györgyi, which were for me very difficult to understand.

J'espère cependant qu'au moins quelques petits détails de mon exposé l'intéresseront.

However I hope that at least a small part of my talk will interest him.

Ce sujet est sûrement déjà très familier à la plupart des participants à cet atelier. La beauté des résultats dont je vais parler, tous obtenus par d'autres que moi, me permet d'espérer qu'ils me pardonneront de rappeler des choses qu'ils connaissent déjà très bien.

I am sure that most participants are already perfectly acquainted with the Kepler problem. I hope that its beauty and interest (which owes nothing to me) will led them to forgive me the recall of results already well known for them.

Le problème de Kepler est un système hamiltonien complètement intégrable dont l'importance pratique est très grande : c'est un modèle du mouvement des planètes du système solaire, et son équivalent quantique est un modèle de l'atome d'hydrogène.

De plus, certaines de ses propriétés le rendent particulièrement intéressant du point de vue mathématique :

- les mouvements comportant une collision du point mobile avec le centre attractif ne sont pas définis pour toutes les valeurs du temps ; cependant, ce système est *régularisable* : on peut le projeter sur un autre système hamiltonien dont tous les mouvements sont éternels, c'est-à-dire définis pour toutes les valeurs du temps ;
- l'algèbre de Lie des symétries infinitésimales des mouvements d'énergie totale fixée dépend du niveau d'énergie considéré.

Ligon et Schaaf ont découvert, en 1976, un difféomorphisme symplectique de l'espace des phases du problème de Kepler, restreint soit aux énergies négatives, soit aux énergies positives, sur un ouvert dense du fibré cotangent soit à une sphère de dimension 3, soit à une nappe d'un hyperboloïde de révolution à deux nappes de dimension 3.

C'est en fait Györgyi qui, avant Ligon et Schaaf, découvrit cet isomorphisme en 1968, sans que cela attire l'attention, probablement parce que ses travaux sont difficiles à lire.

En 1997, Cushman et Duistermaat ont analysé le difféomorphisme de Ligon et Schaaf (qu'il serait plus juste d'appeler *difféomorphisme de Györgyi, Ligon et Schaaf*), qu'ils notent Φ_{LS} . Ils se sont interrogés sur l'explication de ses propriétés. Voici ce qu'ils écrivent.

No explanation was given by Ligon and Schaaf about how the mapping Φ_{LS} was found. Moreover, we found it quite a lot of work to verify the statements following their suggestions. For instance, the proof of property A below consists of a description of a mapping Ψ followed by the statement that one can check that Ψ is the inverse of Φ_{LS} . It took us more manipulations than we liked to prove the equations $\Psi \circ \Phi_{LS} = \text{id}$ and $\Phi_{LS} \circ \Psi = \text{id}$.

Ce que Cushman et Duistermaat appellent *property A below* est le fait que Φ_{LS} soit un difféomorphisme.

En 1997, dans la seconde édition de leur livre *Global aspects of classical integrable systems*, Cushman et Bates ont analysé, avec plus de détails, les propriétés du difféomorphisme de Ligon et Schaaf.

Je me propose de montrer que le difféomorphisme de Ligon et Schaaf peut apparaître comme une conséquence très naturelle de la méthode de régularisation de Moser, et que le fait que ce soit un symplectomorphisme résulte d'une propriété simple des champs de vecteurs conformément hamiltoniens.

Je commencerai en rappelant la méthode de résolution du problème de Kepler qui me semble la plus facile, qui est celle due à Hamilton, publiée en 1846.

Puis je rappellerai la méthode de régularisation de Moser, basée sur une idée employée par Fock en 1935. Elle doit son succès au fait, découvert par Hamilton, que les hodographes des mouvements képlériens sont des cercles, ou des arcs de cercle.

J'expliquerai alors comment construire le difféomorphisme de Ligon et Schaaf, et pourquoi c'est un symplectomorphisme.

Dans l'espace physique \mathcal{E} (espace affine euclidien de dimension 3, d'espace vectoriel associé $\vec{\mathcal{E}}$), soit P un point matériel de masse m soumis au champ gravitationnel d'un centre attractif O . Soit :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP}; \quad r = \|\vec{r}\|; \quad \vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{dt}; \quad p = \|\vec{p}\|.$$

La force exercée sur P est $\vec{f} = -\frac{km\vec{r}}{r^3}$, où k est la constante qui caractérise le champ attractif créé par O .

Les équations du mouvement sont

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{p}}{m}, \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{km\vec{r}}{r^3}.$$

Ces équations sont celles d'un système hamiltonien sur une variété symplectique de dimension 6, le fibré cotangent à $\mathcal{E} \setminus \{O\}$, muni de sa forme symplectique canonique, identifié au fibré tangent grâce au produit scalaire euclidien.

Le hamiltonien est

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{mk}{r}.$$

Le groupe de symétrie naturel du problème est $SO(3)$. L'application moment correspondante est le *moment cinétique*, qu'on peut considérer comme un vecteur élément de $\vec{\mathcal{E}}$ une fois une orientation choisie :

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p},$$

où le caractère \times désigne le produit vectoriel. L'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3)$ et son dual peuvent être identifiés à l'espace vectoriel euclidien $\vec{\mathcal{E}}$. Le crochet de cette algèbre de Lie s'identifie alors au produit vectoriel.

Outre l'énergie E et le moment cinétique \vec{L} , le problème de Kepler admet pour intégrale première le *vecteur excentricité*

$$\vec{\varepsilon} = -\frac{\vec{r}}{r} + \frac{\vec{p} \times \vec{L}}{m^2 k} = \left(\frac{\|\vec{p}\|^2}{m^2 k} - \frac{1}{r} \right) \frac{\vec{r}}{r} - \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{m^2 k} \frac{\vec{p}}{p},$$

découvert par *Jakob Hermann (1678–1753)*, improprement appelé *vecteur de Laplace*, ou *vecteur de Runge-Lenz*, dont l'origine est longtemps restée mystérieuse.

En utilisant les intégrales premières E , \vec{L} et $\vec{\varepsilon}$, on peut déterminer toutes les courbes intégrales du problème de Kepler.

Je parlerai d'abord du cas où \vec{r} et \vec{p} ne sont pas colinéaires, puis du cas où ils sont colinéaires et où le point P se déplace sur une droite passant par le centre attractif O .

Résolution du problème de Kepler

[Retour au Sommaire](#)

Puisque $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ est une intégrale première, si \vec{r} et \vec{p} ne sont pas colinéaires à l'instant initial, ils ne le sont pas non plus pendant toute la durée du mouvement. La méthode, due à Hamilton, de résolution du problème de Kepler, applicable dans ce cas, n'utilise pas le vecteur excentricité $\vec{\varepsilon}$.

Choisissons un trièdre orthonormé d'orientation positive, d'origine O et de vecteurs unitaires \vec{e}_x , \vec{e}_y et \vec{e}_z , tels que \vec{L} soit parallèle à l'axe \vec{e}_z . Soit L sa composante sur cet axe. Les vecteurs \vec{r} et \vec{p} restent constamment parallèles au plan xOy . En notant θ l'angle polaire de \vec{r} , on peut écrire

$$L = mr^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{Constante}.$$

C'est la *seconde loi de Kepler*, aussi appelée *loi des aires*, car $\frac{L}{2m}$ est l'aire balayée par le segment de droite OP par unité de temps.

Puisque $\frac{d\theta}{dt} \neq 0$ on peut, au lieu de t , utiliser θ pour variable indépendante et écrire les équations différentielles vérifiées par \vec{r} et \vec{p} en coordonnées polaires. Celle vérifiée par \vec{p} ,

$$\frac{d\vec{p}}{d\theta} = -\frac{m^2 k}{L} (\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y),$$

s'intègre aisément, et on obtient

$$\vec{p} = \frac{m^2 k}{L} (-\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y) + \vec{c},$$

où \vec{c} est la constante (vectorielle) d'intégration.

Cette égalité montre que lorsque θ varie, l'extrémité d'un vecteur d'origine O égal à \vec{p} parcourt un cercle, ou un arc de cercle.

Résolution du problème de Kepler (3)

[Retour au Sommaire](#)

Choisissons \vec{e}_y de manière telle que

$$\vec{c} = c\vec{e}_y,$$

c étant une constante réelle, dont le signe peut être quelconque.

L'extrémité du vecteur d'origine O égal à \vec{p} parcourt, dans le plan contenant O et parallèle aux vecteurs \vec{e}_x et \vec{e}_y , un cercle, ou un arc de cercle, ayant pour centre le point de coordonnée $(x = 0, y = c, z = 0)$ et pour rayon

$$\mathcal{R} = \frac{m^2 k}{|L|}.$$

Ce cercle (ou cet arc de cercle) est (au facteur multiplicatif m près) l'*hodographe* du problème de Kepler. Pour faciliter le langage, nous dirons dans la suite *hodographe* tout court au lieu de *hodographe multiplié par m* .

L'égalité

$$\vec{L} = L\vec{e}_z = r \left(\frac{m^2 k}{L} + c \cos \theta \right) \vec{e}_z$$

permet d'écrire

$$r = \frac{L^2}{m^2 k + Lc \cos \theta} = \frac{\Lambda}{1 + \varepsilon \cos \theta},$$

où nous avons posé

$$\Lambda = \frac{L^2}{m^2 k}, \quad \varepsilon = \frac{Lc}{m^2 k}.$$

C'est l'équation, en coordonnées polaires (r, θ) , d'une conique d'excentricité $|\varepsilon|$ et de foyer O . Plus précisément, l'orbite est :

- un *cercle* si $\varepsilon = 0$,
- une *ellipse* si $0 < |\varepsilon| < 1$,
- une *parabole* si $|\varepsilon| = 1$,
- une *hyperbole* (plus exactement une *branche d'hyperbole*) si $|\varepsilon| > 1$.

Dans le cas où cette orbite est une ellipse, ce résultat est la *première loi de Kepler*.

L'énergie E peut s'exprimer sous les deux formes

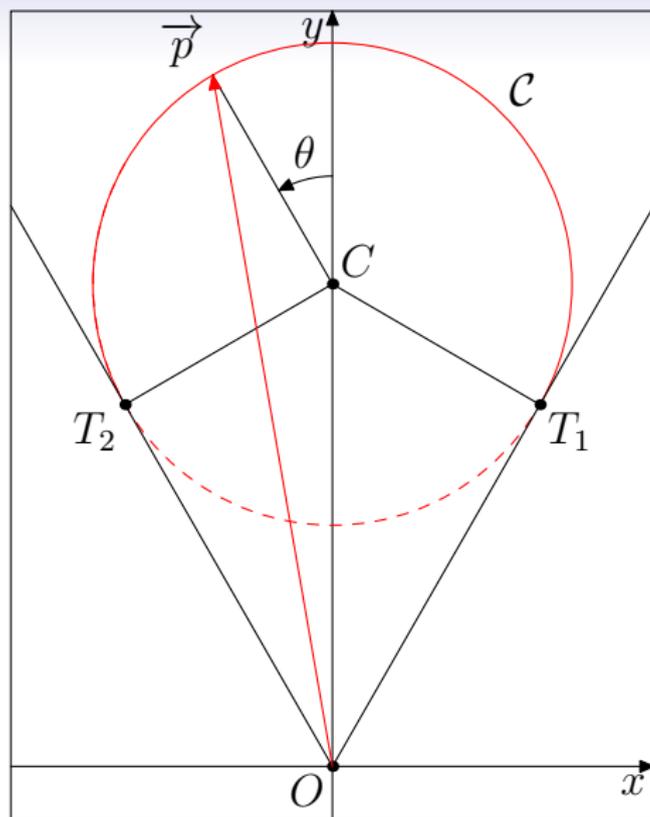
$$E = \frac{m^3 k^2}{2L^2} (\varepsilon^2 - 1) = \frac{1}{2m} (c^2 - \mathcal{R}^2).$$

Le terme $(c^2 - \mathcal{R}^2)$ qui figure au membre de droite de cette double égalité est la *puissance* du point O par rapport au cercle qui porte l'hodographe. Trois cas doivent être distingués.

- Si $|\varepsilon| < 1$, l'énergie est négative, le point O est à l'intérieur du cercle qui porte l'hodographe, l'orbite est une ellipse (ou un cercle, si $\varepsilon = 0$). L'hodographe est le cercle entier.
- Si $|\varepsilon| = 1$, l'énergie est nulle, le point O est sur le cercle qui porte l'hodographe, l'orbite est une parabole. L'hodographe est le cercle *moins* le point O .
- Si $|\varepsilon| > 1$, l'énergie est positive, le point O est à l'extérieur du cercle qui porte l'hodographe, l'orbite est une branche d'hyperbole. L'hodographe est un arc de cercle.

Résolution du problème de Kepler (6)

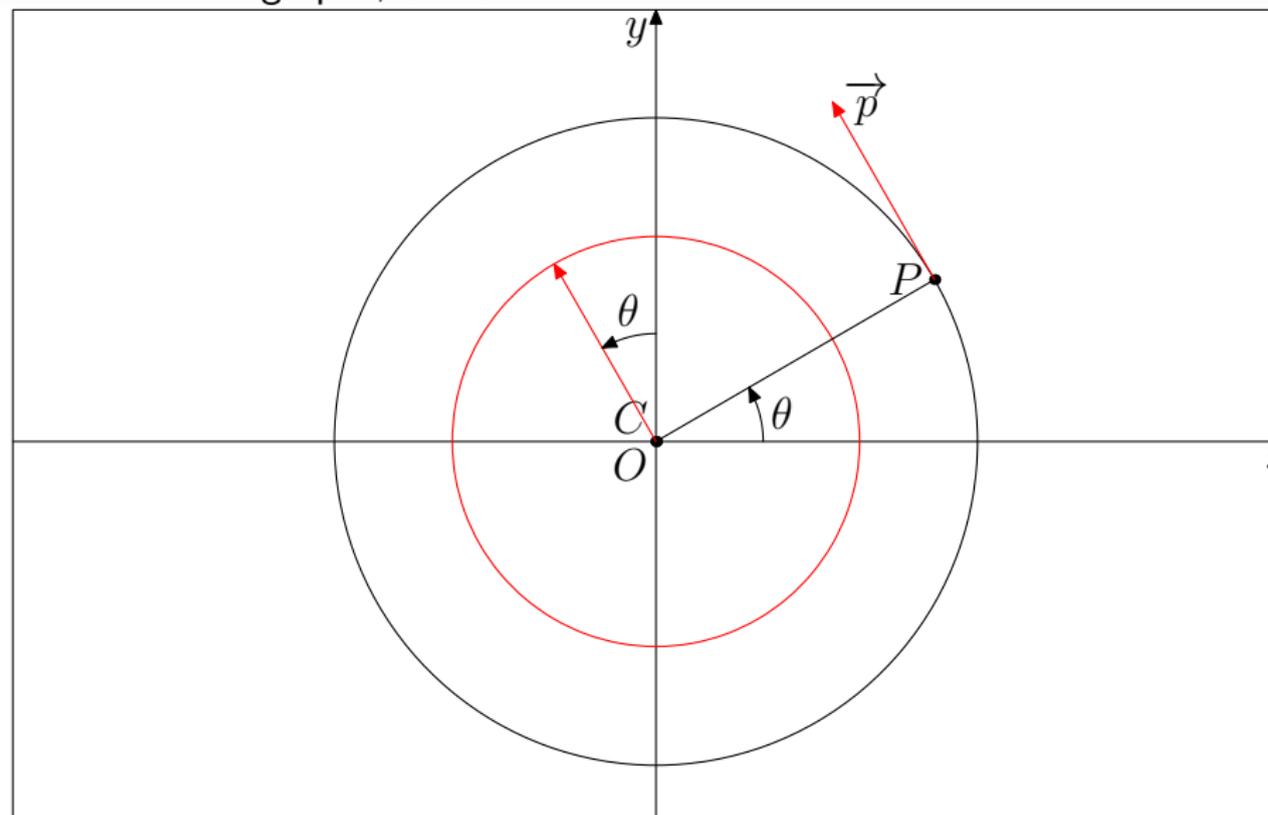
[Retour au Sommaire](#)



Dans ce dernier cas, où $|\varepsilon| > 1$ et $E > 0$, l'hodographe et l'arc de cercle en trait plein sur la figure, dont la concavité est tournée vers le point O . En effet, lorsque r croît, p décroît, et lorsque \vec{p} tend vers \vec{OT}_1 ou vers \vec{OT}_2 , r tend vers $+\infty$ donc p tend vers la plus petite valeur possible.

L'arc de cercle en pointillés est l'hodographe d'un problème de Kepler modifié où le centre O est répulsif.

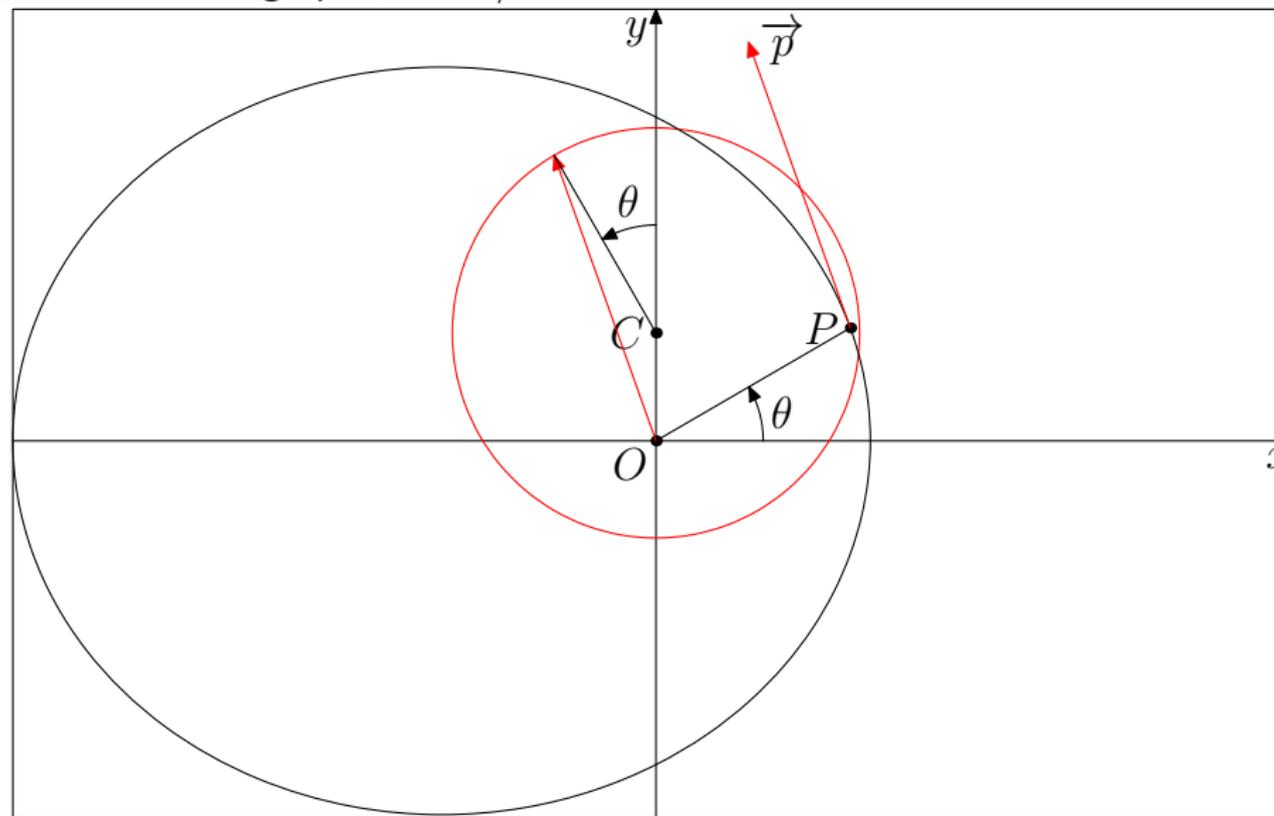
Orbite et hodographe, $\varepsilon = 0$



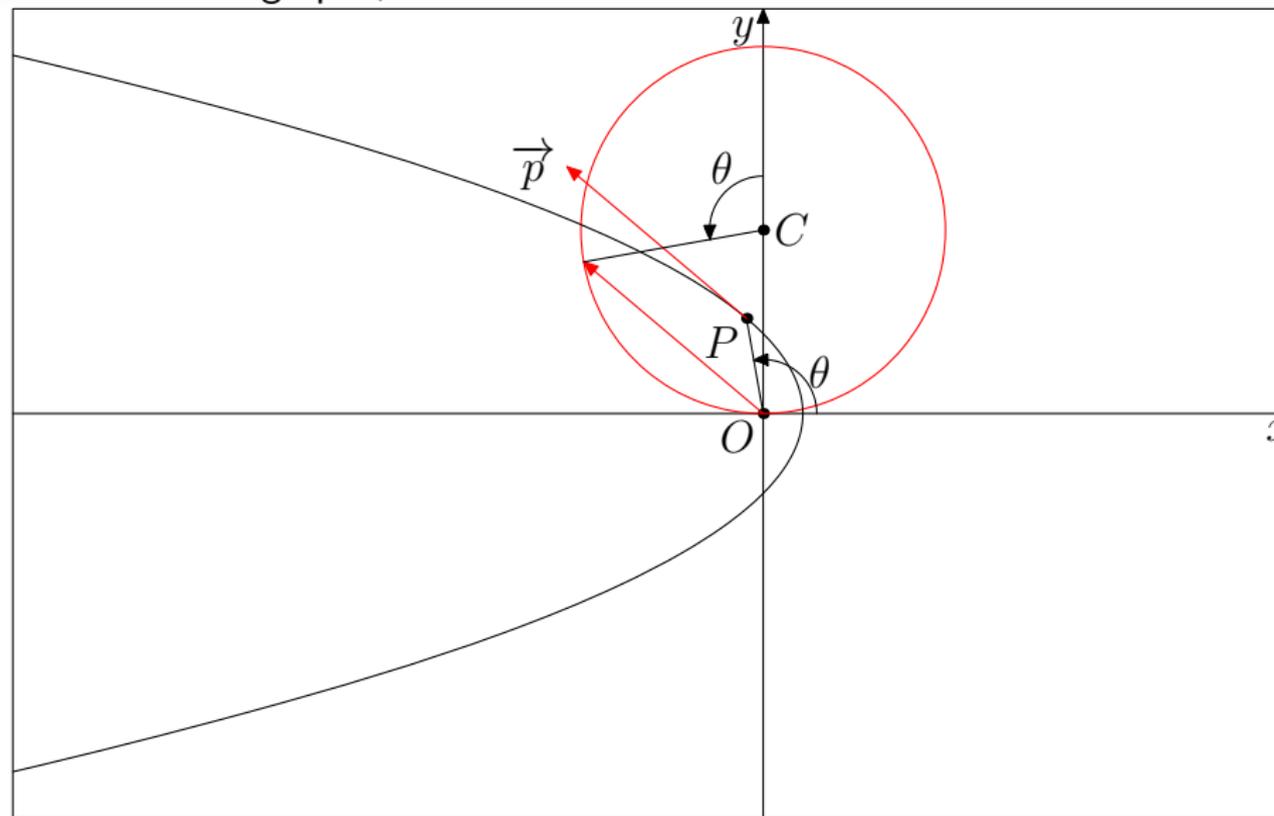
Résolution du problème de Kepler (8)

[Retour au Sommaire](#)

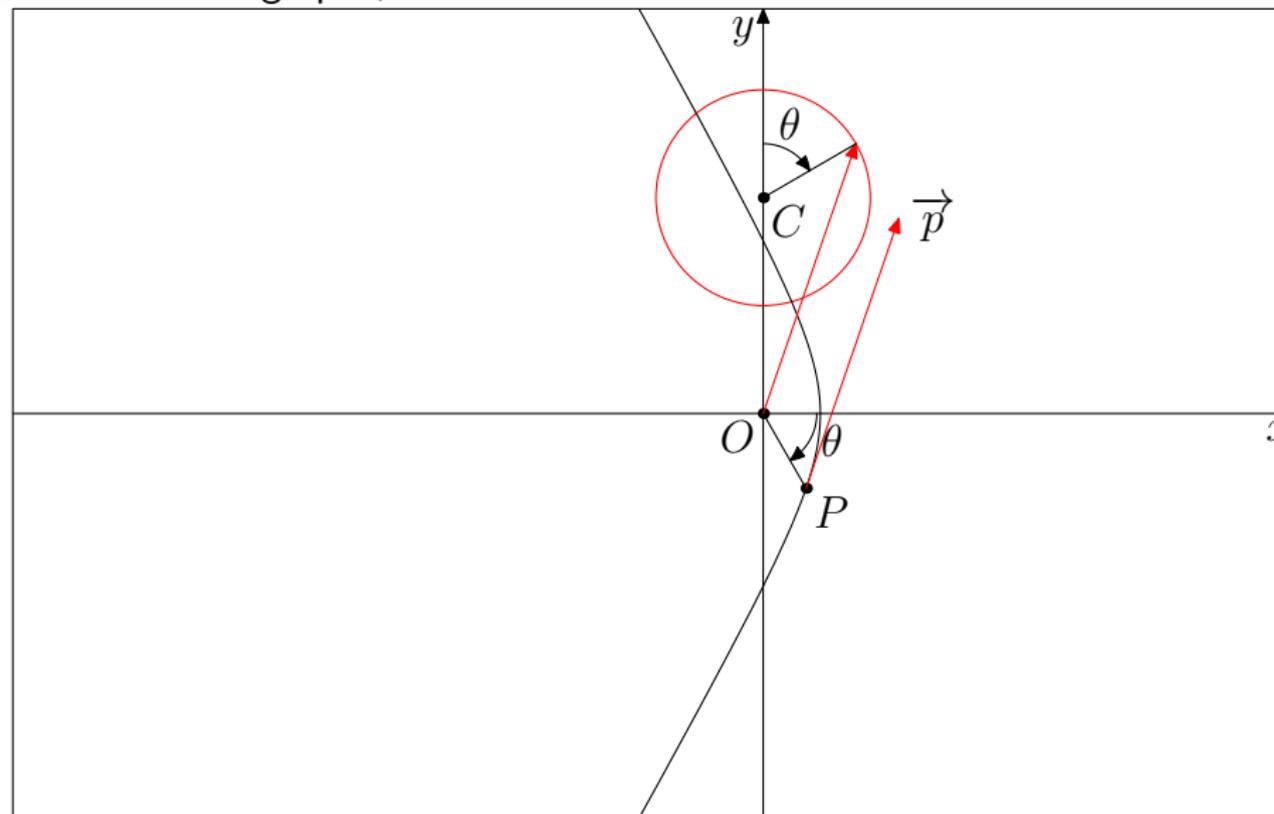
Orbite et hodographe, $\varepsilon = 1/2$



Orbite et hodographe, $\varepsilon = 1$



Orbite et hodographe, $\varepsilon = 2$



La troisième loi de Kepler

Lorsque $E < 0$, l'orbite est une ellipse dont le demi-grand axe a et le demi-petit axe b sont

$$a = \frac{\Lambda}{1 - \varepsilon^2}, \quad b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

En intégrant sur une période l'égalité $r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{m}$ on trouve

$$\frac{|L|T}{2m} = \text{aire intérieure à l'orbite.}$$

On en déduit

$$T = \frac{2\pi ma^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{|L|}.$$

En tenant compte de $L^2 = m^2 ka\sqrt{1 - \varepsilon^2}$, on obtient

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k} a^3.$$

C'est la *troisième loi de Kepler* : le carré de la période est proportionnel au cube du demi-grand axe.

L'énergie E s'exprime très simplement en fonction de a :

$$E = -\frac{km}{2a}.$$

Un changement de variable indépendante utile

Soit $\sigma : \mathbb{R} \times T^*(\mathcal{E} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction

$$\sigma(t, \vec{r}, \vec{p}) = \frac{1}{mk} (\vec{p} \cdot \vec{r} - 2E(\vec{r}, \vec{p})t),$$

où $t \in \mathbb{R}$ est le temps, (\vec{r}, \vec{p}) un élément de $T^*(\mathcal{E} \setminus \{0\})$ identifié à $\mathcal{E} \setminus \{0\} \times \mathcal{E}$ et où $E(\vec{r}, \vec{p})$ est l'énergie.

En utilisant le fait que l'énergie E est une intégrale première du problème de Kepler, il est facile de vérifier que pour toute courbe intégrale $t \mapsto (\vec{r}(t), \vec{p}(t))$ de ce problème

$$\frac{d\sigma(t, \vec{r}(t), \vec{p}(t))}{dt} = \frac{1}{r(t)}.$$

Lorsque $E(\vec{r}(t), \vec{p}(t)) \neq 0$, l'application $t \mapsto s = \sigma(t, \vec{r}(t), \vec{p}(t))$ est un difféomorphisme d'un intervalle ouvert de \mathbb{R} sur un autre.

On peut donc utiliser s au lieu de t comme variable indépendante.

Un changement de variable indépendante utile (2)

La variable indépendante s ainsi définie est appelée *paramètre de Levi-Civita*, en hommage au mathématicien italien Tullio Levi-Civita (1873–1941) qui l'a découverte.

Les équations différentielles vérifiées par $(\overrightarrow{r}(s), \overrightarrow{p}(s))$ sont

$$\frac{d\overrightarrow{r}(s)}{ds} = \frac{r(s)\overrightarrow{p}(s)}{m}, \quad \frac{d\overrightarrow{p}(s)}{ds} = -\frac{kmr(s)}{r^2(s)}.$$

Les solutions du problème de Kepler sont les courbes intégrales

- du champ de vecteurs hamiltonien $\overrightarrow{\mathcal{X}}_E$ associé au hamiltonien $E(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{p})$, lorsque le temps t est utilisé comme variable indépendante,
- du champ de vecteurs $r\overrightarrow{\mathcal{X}}_E$ lorsque c'est le paramètre de Levi-Civita qui est utilisé comme variable indépendante. Ce champ de vecteurs sera dit *conformément hamiltonien*.

Cas où à l'instant initial \vec{r} et \vec{p} sont colinéaires

Si à l'instant initial $t = t_0$, $\vec{r}(t_0)$ et $\vec{p}(t_0)$ sont colinéaires, ils restent colinéaires pour toutes les valeurs du temps pour lesquelles le mouvement est défini. Chaque orbite est une partie d'une ligne droite passant par le centre attractif O .

Sur cette droite, puisque E est une intégrale première, l'abscisse x du point du point mobile est solution de l'équation différentielle

$$\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 = 2\left(\frac{E}{m} + \frac{k}{x(t)}\right).$$

Il est commode de choisir pour origine du temps l'instant où le point P atteint l'origine O , et d'imposer la condition $x > 0$.

Cas où à l'instant initial \vec{r} et \vec{p} sont colinéaires (2)

Lorsque l'énergie E est nulle, exprimons x et t en fonction d'une nouvelle variable indépendante τ choisie de manière telle que lorsque τ tend vers 0, x et t tendent vers 0 tandis que $\frac{dx}{dt}$ tend vers l'infini.

Nous obtenons ainsi les deux solutions ayant la même expression, définies l'une sur l'intervalle de temps $] -\infty, 0 [$ et l'autre sur l'intervalle de temps $] 0, +\infty [$,

$$x(\tau) = \frac{k\tau^2}{2}, \quad t(\tau) = \frac{k\tau^3}{6}.$$

Cas où à l'instant initial \vec{r} et \vec{p} sont colinéaires (4)

Lorsque $E \neq 0$, en utilisant pour variable indépendante le paramètre de Levi-Civita s , on obtient les solutions

$$\lambda s = \begin{cases} \text{Arg} \cosh \left(\frac{\lambda^2}{k} x + 1 \right) & \text{si } E > 0, \\ \text{Arc} \cos \left(\frac{\lambda^2}{k} x - 1 \right) & \text{si } E < 0, \end{cases}$$

avec $\lambda = \left(\frac{2|E|}{m} \right)^{1/2}$.

Par suite,

$$\begin{cases} \cosh(\lambda s) = \left(\frac{\lambda^2}{k} x + 1 \right) & \text{lorsque } E > 0, \\ \cos(\lambda s) = \left(\frac{\lambda^2}{k} x - 1 \right) & \text{lorsque } E < 0. \end{cases}$$

Cas où à l'instant initial \vec{r} et \vec{p} sont colinéaires (4)

Les expressions de l'abscisse x du point P en fonction du paramètre de Levi-Civita s sont donc

$$x(s) = \begin{cases} \frac{k}{\lambda^2} (\cosh(\lambda s) - 1) & \text{si } E > 0, \\ \frac{k}{\lambda^2} (1 - \cos(\lambda s)) & \text{si } E < 0, \end{cases} \quad \text{avec } \lambda = \left(\frac{2|E|}{m} \right)^{1/2}.$$

Celles du temps t s'en déduisent par intégration, puisque

$$\frac{dt(s)}{ds} = x(s) :$$

$$t(s) = \begin{cases} \frac{k}{\lambda^3} (\sinh(\lambda s) - \lambda s) & \text{si } E > 0, \\ \frac{k}{\lambda^3} (\lambda s - \sin(\lambda s)) & \text{si } E < 0, \end{cases} \quad \text{avec } \lambda = \left(\frac{2|E|}{m} \right)^{1/2}.$$

En 1935, Fock a employé une *projection stéréographique inverse* pour l'étude des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène en mécanique quantique.

En 1970, Moser a utilisé la même idée pour la régularisation du problème de Kepler. On obtient ainsi une correspondance entre les hodographes orientés des mouvements d'énergie $E < 0$ fixée et les *grands cercles orientés* d'une sphère de dimension 3.

Pour les mouvements d'énergie positive fixée, on doit remplacer la sphère par une nappe d'un hyperboloïde de révolution à deux nappes, de dimension 3. On obtient une correspondance entre les hodographes orientés de mouvements d'énergie $E > 0$ fixée et les *grandes hyperboles* de cet hyperboloïde.

Pour traiter en même temps les cas $E < 0$ et $E > 0$, on introduit la variable auxiliaire

$$\zeta = \begin{cases} 1 & \text{si } E < 0, \\ -1 & \text{si } E > 0. \end{cases}$$

En prenant le point O pour origine, on peut identifier l'espace affine \mathcal{E} avec l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}$ qui lui est associé. Soit $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ une base orthonormée de $\vec{\mathcal{E}}$, d'orientation positive.

On ajoute à cette base un vecteur unitaire de plus \vec{e}_h , et on note h la coordonnée correspondante. On obtient ainsi un espace vectoriel de dimension 4, noté $\vec{\mathcal{F}}$. L'espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}$ sera identifié au sous-espace vectoriel de $\vec{\mathcal{F}}$ d'équation $h = 0$.

L'espace vectoriel $\vec{\mathcal{F}}$, de dimension 4, sera muni du produit scalaire

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = U_x V_x + U_y V_y + U_z V_z + \zeta U_h V_h,$$

où $\vec{U} = U_x \vec{e}_x + U_y \vec{e}_y + U_z \vec{e}_z + U_h \vec{e}_h$ et $\vec{V} = V_x \vec{e}_x + V_y \vec{e}_y + V_z \vec{e}_z + V_h \vec{e}_h$ sont deux éléments de $\vec{\mathcal{F}}$. C'est un produit scalaire euclidien lorsque $\zeta = 1$, pseudo-euclidien lorsque $\zeta = -1$.

Soit Q_ρ la quadrique d'équation

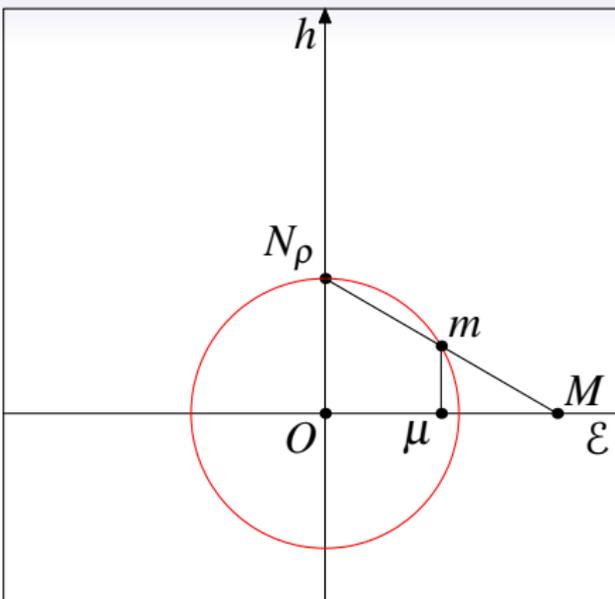
$$h^2 + \zeta(x^2 + y^2 + z^2) = \rho^2, \quad \text{avec } \rho > 0.$$

C'est une *sphère* lorsque $\zeta = 1$, un *hyperboloïde de révolution à deux nappes* lorsque $\zeta = -1$.

La *projection stéréographique* (usuelle lorsque $\zeta = 1$, généralisée lorsque $\zeta = -1$) de la quadrique Q_ρ moins le point N_ρ sur l'espace \mathcal{E} est l'application qui associe, à chaque point $M \in Q_\rho \setminus \{N_\rho\}$, le point d'intersection de la ligne droite qui joint N et M avec \mathcal{E} (identifié à l'hyperplan de $\vec{\mathcal{F}}$ d'équation $h = 0$).

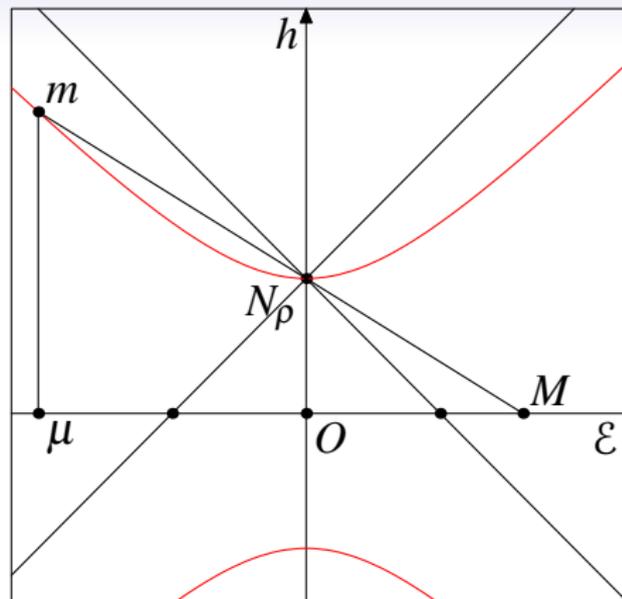
La régularisation de Moser (4)

[Retour au Sommaire](#)



$$\zeta = 1$$

Projection stéréographique



$$\zeta = -1$$

Projection stéréographique
généralisée

La régularisation de Moser (5)

[Retour au Sommaire](#)

Puisque la projection stéréographique est un difféomorphisme on peut, de manière unique, la prolonger aux fibrés cotangents de manière telle que l'image réciproque de la forme de Liouville de $T^*\mathcal{E}$ soit égale à la forme de Liouville de $T^*(Q_\rho \setminus \{N_\rho\})$. Ce prolongement cotangent sera noté S_ρ . Il applique chaque couple (M, \vec{W}) formé d'un point $M \in Q_\rho \setminus \{N_\rho\}$ et d'un vecteur \vec{W} tangent à Q_ρ en ce point, sur un couple (\vec{r}, \vec{p}) de deux vecteurs de $\vec{\mathcal{E}}$, d'une manière telle que $\vec{W} \cdot d\vec{OM} = \vec{r} \cdot d\vec{p}$.

Les formules donnant (\vec{p}, \vec{r}) en fonction de (\vec{OM}, \vec{W}) sont

$$\begin{cases} \vec{p} = \frac{\rho}{\rho - h} \vec{O\mu}, & \text{avec } h^2 + \zeta \|\vec{O\mu}\|^2 = \rho^2, \\ \vec{r} = \frac{\rho - h}{\rho} \vec{W}_3 + \frac{W_h}{\rho} \vec{O\mu}, \end{cases}$$

où on a posé

$$\vec{OM} = \vec{O\mu} + h\vec{e}_h, \quad \vec{W} = \vec{W}_3 + W_h\vec{e}_h.$$

Les formules donnant la transformation inverse sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{O}_\mu = \frac{2\rho^2}{\rho^2 + \zeta p^2} \vec{p}, \\ h = \rho \frac{p^2 - \zeta \rho^2}{p^2 + \zeta \rho^2}, \quad \text{avec } p = \|\vec{p}\| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}, \\ \vec{W}_3 = \frac{\rho^2 + \zeta p^2}{2\rho^2} \vec{r} - \frac{\zeta \vec{r} \cdot \vec{p}}{\rho^2} \vec{p}, \\ W_h = \frac{\zeta \vec{r} \cdot \vec{p}}{\rho}. \end{array} \right.$$

On a posé

$$\vec{OM} = \vec{O}_\mu + h \vec{e}_h, \quad \vec{W} = \vec{W}_3 + W_h \vec{e}_h.$$

Ces formules montrent que si $\vec{p}_1 = \overrightarrow{Om_1}$ et $\vec{p}_2 = \overrightarrow{Om_2}$ sont deux vecteurs colinéaires de $\vec{\mathcal{E}}$ tels que $\overrightarrow{Om_1} \cdot \overrightarrow{Om_2} = -\zeta\rho^2$, leurs images, par la projection stéréographique inverse, sont deux points M_1 et M_2 symétriques l'un de l'autre par rapport à O .

Cela prouve que la projection stéréographique inverse applique les hodographes des mouvements d'énergie $E = -\frac{\zeta\rho^2}{2m}$ sur des courbes tracées sur la quadrique Q_ρ admettant O pour centre de symétrie.

Ces courbes sont

- des grands cercles de la sphère Q_ρ lorsque $\zeta = 1$,
- des branches de grandes hyperboles de l'hyperboloïde Q_ρ lorsque $\zeta = -1$, où le nom "grande hyperbole" est employé par analogie avec "grand cercle", pour désigner l'intersections de Q_ρ avec un plan passant par son centre de symétrie O .

L'application S_ρ est un difféomorphisme *anti-symplectique*, non un symplectomorphisme, de $T^*(Q_\rho \setminus \{N_\rho\})$ sur $T^*\mathcal{E}$, lorsque ces fibrés cotangents sont munis de leurs formes symplectiques canoniques.

Le hamiltonien transformé $S_\rho^*E = E \circ S_\rho$ est

$$E \circ S_\rho = \frac{-\zeta\rho^2}{2m} + \frac{\zeta\rho^3}{m(\rho - h)\|\vec{W}\|} \left(\|\vec{W}\| - \frac{km^2}{\rho^2} \right).$$

Lorsque (\vec{OM}, \vec{W}) est l'image d'un élément (\vec{r}, \vec{p}) de l'espace des phases du problème de Kepler appartenant au niveau d'énergie

$E = -\frac{\zeta\rho^2}{2m}$, on vérifie que $\vec{W} \cdot \vec{W} > 0$ et que

$$\|\vec{W}\| = (\vec{W} \cdot \vec{W})^{1/2} = \frac{km^2}{\rho^2}.$$

Par suite,

$$d(E \circ S_\rho) = \frac{\zeta \rho^3}{m(\rho - h) \|\vec{W}\|} d\|\vec{W}\|.$$

Ce résultat prouve que lorsqu'on se restreint au niveau d'énergie $E = -\frac{\zeta \rho^2}{2m}$, S_ρ^{-1} transforme le champ de vecteurs hamiltonien du problème de Kepler en un champ conformément hamiltonien sur $T^*(Q_\rho \setminus \{N_\rho\})$ moins la section nulle, de hamiltonien $\|\vec{W}\|$ et de facteur conforme $\frac{\zeta \rho^3}{m(\rho - h) \|\vec{W}\|}$.

L'ensemble des symétries infinitésimales du problème de Kepler, restreint soit aux énergies positives, soit aux énergies négatives, est donc identique à celui d'un champ hamiltonien sur $T^*(Q_\rho \setminus \{N_\rho\})$ moins la section nulle, de hamiltonien $\|\vec{W}\|$. C'est

- $so(4)$ pour les énergies négatives,
- $so(3, 1)$ pour les énergies positives.

Pour les mouvements d'énergie nulle il faut remplacer la projection stéréographique par une inversion de centre O et de rapport λ . Les formules exprimant son prolongement aux fibrés cotangents sont

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{Om} = \frac{\lambda}{\|\overrightarrow{Om}\|^2} \overrightarrow{p}, \\ \overrightarrow{r} = \frac{\|\overrightarrow{Om}\|^2}{\lambda} \overrightarrow{W} - \frac{2\overrightarrow{W} \cdot \overrightarrow{Om}}{\lambda} \overrightarrow{Om}. \end{array} \right.$$

L'application $(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{r}) \mapsto (\overrightarrow{Om}, \overrightarrow{W})$ étant involutive, on a inversement

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{Om} = \frac{\lambda}{p^2} \overrightarrow{p}, \\ \overrightarrow{W} = \frac{p^2}{\lambda} \overrightarrow{r} - \frac{2\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{p}}{\lambda} \overrightarrow{p}. \end{array} \right.$$

Notons S_0 le prolongement aux covecteurs de l'inversion de pôle O et de rapport λ . Le hamiltonien transformé a pour expression

$$E \circ S_0 = \frac{\lambda^2}{2m \|\vec{W}\| \|\vec{Om}\|^2} \left(\|\vec{W}\| - \frac{2m^2 k}{\lambda} \right).$$

Le vecteur \vec{W} est maintenant un élément de $\vec{\mathcal{E}}$, de dimension 3, et nous avons posé

$$\|\vec{W}\| = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}.$$

Lorsque (\vec{Om}, \vec{W}) est l'image, par S_0 , d'un élément (\vec{r}, \vec{p}) du niveau d'énergie 0 de l'espace des phases du problème de Kepler, on vérifie aisément que

$$\|\vec{W}\| = \frac{2m^2 k}{\lambda}.$$

La régularisation de Moser (12)

[Retour au Sommaire](#)

Par suite, sur l'image par S_0 du niveau d'énergie 0 du problème de Kepler, on a

$$d(E \circ S_0) = \frac{\lambda^3}{4m^3 k \|\vec{Om}\|^2} d(\|\vec{W}\|).$$

Ce résultat prouve que lorsqu'on se restreint au niveau d'énergie $E = 0$, S_0 transforme le champ de vecteurs hamiltonien du problème de Kepler en un champ conformément hamiltonien, de hamiltonien $\|\vec{W}\|$ et de facteur conforme $\frac{\lambda^3}{4m^3 k \|\vec{Om}\|^2}$.

Par suite, l'algèbre de Lie des symétries infinitésimales du niveau d'énergie 0 de l'ensemble des mouvements du problème de Kepler est identique à celle des symétries infinitésimales du champ de vecteurs hamiltonien ayant pour hamiltonien $\|\vec{W}\|$.

C'est l'algèbre de Lie $\mathfrak{e}(3)$ des déplacements infinitésimaux (rotations et translations) de l'espace affine euclidien \mathcal{E} , de dimension 3.

Le principal inconvénient de la méthode de régularisation de Moser est qu'elle traite séparément chaque niveau d'énergie.

On peut cependant, en modifiant très légèrement les constructions de Moser, définir deux difféomorphismes définis, l'un sur l'ouvert de l'espace des phases du problème de Kepler sur lequel l'énergie est strictement négative, l'autre sur l'ouvert de cet espace sur lequel l'énergie est strictement positive, et à valeurs le premier dans l'espace des phases du mouvement libre d'un point matériel sur une sphère de dimension 3, et le second dans l'espace des phases du mouvement libre d'un point matériel sur une nappe d'un hyperboloïde de révolution à deux nappes, de dimension 3.

Les difféomorphismes de Ligon et Schaaf s'en déduiront par une simple composition avec un difféomorphisme de l'espace des phases transformé.

La construction de ces difféomorphismes repose sur une idée très simple : la projection stéréographique inverse utilisée par Moser a pour image une quadrique Q_ρ dépendant du nombre réel $\rho > 0$, qui dépend de l'énergie E du mouvement considéré puisque $E = \frac{-\zeta\rho^2}{2m}$.

En la composant avec une homothétie de rapport R/ρ , où $R > 0$ est une grandeur fixée, on obtient une application à valeurs dans une quadrique Q_R ne dépendant plus de la valeur de l'énergie, mais seulement de son signe. Ce sera un sphère de dimension 3 et de rayon R si $E < 0$, une nappe d'un hyperboloïde de révolution à deux nappes, de dimension 3, si $E > 0$.

Les prolongements aux covecteurs de chacun des deux difféomorphismes ainsi obtenus, l'un pour les énergies strictement négatives, l'autre pour les énergies strictement positives, sont des difféomorphismes symplectiques *qui dépendent de ρ* , (donc de l'énergie).

Ces difféomorphismes symplectiques, qui dépendent de ρ , prennent leurs valeurs dans un espace *qui ne dépend plus de ρ* . Le premier prend ses valeurs dans le fibré cotangent à une sphère de dimension 3, le second dans le fibré cotangent à une nappe d'un hyperboloïde de révolution à deux nappes, de dimension 3.

On vérifie que pour chaque valeur de ρ les images, par chacun de ces difféomorphismes, de deux niveaux d'énergie *distincts* de l'espace des phases du problème de Kepler, *sont disjointes*.

En restreignant le difféomorphisme correspondant à chaque valeur de ρ au niveau d'énergie $E = \frac{-\zeta\rho^2}{2m}$ et en donnant à ρ toutes les valeurs strictement positives, on obtient deux difféomorphismes définis, l'un sur l'ouvert de l'espace des phases du problème de Kepler sur lequel l'énergie est strictement négative, l'autre sur l'ouvert de cet espace sur lequel l'énergie est strictement négative.

Ces deux difféomorphismes *ne sont plus symplectiques*, car ce ne sont pas les prolongement aux covecteurs de difféomorphismes de l'espace de configuration du problème de Kepler sur l'espace de configuration du mouvement libre d'un point matériel sur une sphère ou sur une nappe d'un hyperboloïde.

L'emploi de la variable ζ prenant la valeur 1 lorsque $E < 0$ et la valeur -1 lorsque $E > 0$ permet de traiter simultanément ces deux cas.

Outre les quadriques Q_ρ d'équations

$$h^2 + \zeta(x^2 + y^2 + z^2) = \zeta\rho^2,$$

où ρ peut prendre toutes les valeurs strictement positives, considérons la quadrique Q_R d'équation

$$h^2 + \zeta(x^2 + y^2 + z^2) = \zeta R^2,$$

où R est une quantité strictement positive fixée, et notons N_R le point de Q_R de coordonnées $x = y = z = 0$, $h = R$.

À chaque point $M \in Q_R$, associons le point $M_\rho \in Q_\rho$ tel que

$$\overrightarrow{OM}_\rho = \frac{\rho}{R} \overrightarrow{OM}.$$

Soit $\mathcal{T}_\rho : T^*Q_R \rightarrow T^*Q_\rho$ le prolongement aux covecteurs du difféomorphisme $Q_R \mapsto Q_\rho$. C'est un difféomorphisme symplectique qui associe, à chaque couple (M, \overrightarrow{W}) formé d'un point $M_R \in Q_R$ et d'un vecteur \overrightarrow{W} tangent à Q_R en ce point, le couple $(M_\rho, \overrightarrow{W}_\rho)$ formé d'un point $M_\rho \in Q_\rho$ et d'un vecteur \overrightarrow{W}_ρ tangent à Q_ρ en ce point. Il a pour expression

$$\overrightarrow{OM}_\rho = \frac{\rho}{R} \overrightarrow{OM}, \quad \overrightarrow{W}_\rho = \frac{R}{\rho} \overrightarrow{W}.$$

Pour chaque $\rho > 0$, on compose le difféomorphisme symplectique $\mathcal{T}_\rho =: T^*Q_R \rightarrow T^*Q_\rho$ avec le difféomorphisme symplectique $S_\rho : T^*(Q_\rho \setminus \{N_\rho\}) \rightarrow T^*\mathcal{E}$ défini dans le paragraphe précédent.

Les difféomorphismes symplectiques $S_{\rho,R} = S_{\rho} \circ \mathcal{T}_{\rho}$ ainsi obtenus ont pour expressions

$$\begin{cases} \vec{p} = \frac{\rho}{R-h} \vec{O\mu}, & \text{avec } h^2 + \zeta \|\vec{O\mu}\|^2 = R^2, \\ \vec{r} = \frac{R-h}{\rho} \vec{W_3} + \frac{W_h}{\rho} \vec{O\mu}. \end{cases}$$

On a posé

$$\vec{OM} = \vec{O\mu} + h\vec{e}_h, \quad \vec{W} = \vec{W_3} + W_h\vec{e}_h.$$

Les formules pour les transformations inverses sont

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{O\mu} = \frac{2R\rho}{\rho^2 + \zeta p^2} \vec{p}, \\ h = R \frac{p^2 - \zeta \rho^2}{p^2 + \zeta \rho^2}, \quad \text{avec } p = \|\vec{p}\| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}, \\ \vec{W}_3 = \frac{\rho^2 + \zeta p^2}{2R\rho} \vec{r} - \frac{\zeta \vec{r} \cdot \vec{p}}{R\rho} \vec{p}, \\ W_h = \frac{\zeta \vec{r} \cdot \vec{p}}{R}. \end{array} \right.$$

On a posé

$$\vec{OM} = \vec{O\mu} + h\vec{e}_h, \quad \vec{W} = \vec{W}_3 + W_h\vec{e}_h.$$

Une réinterprétation des résultats de Moser (8)

Le difféomorphisme $S_{\rho,R}^{-1}$ applique le sous-ensemble de $T^*\mathcal{E}$ sur lequel l'énergie est $E(\vec{r}, \vec{p}) = -\frac{\zeta\rho^2}{2m}$ dans le sous-ensemble de T^*Q_R sur lequel $\|\vec{W}\| = \frac{km^2}{R\rho}$.

Par suite, si ρ_1 and ρ_2 sont deux valeurs distinctes possibles de ρ , les images par $S_{\rho_1,R}^{-1}$ du niveau d'énergie $E_1(\vec{r}, \vec{p}) = -\frac{\zeta\rho_1^2}{2m}$, et par $S_{\rho_2,R}^{-1}$ du niveau d'énergie $E_2(\vec{r}, \vec{p}) = -\frac{\zeta\rho_2^2}{2m}$, sont disjointes.

Restreignons chaque application $S_{\rho,R}^{-1}$ au sous-ensemble de $T^*\mathcal{E}$ sur lequel l'énergie est $E(\vec{r}, \vec{p}) = -\frac{\zeta\rho^2}{2m}$. Lorsque ρ prend toutes les valeurs strictement positives, la famille d'applications ainsi définies sur les ensembles de niveaux de l'énergie du problème de Kepler détermine une application, notée S^{-1} , du fibré cotangent $T^*\mathcal{E} \setminus \{0\}$ moins la section nulle sur $T^*(Q_R \setminus \{N_R\})$ moins la section nulle.

Une réinterprétation des résultats de Moser (9)

L'application S^{-1} est un difféomorphisme, associant à chaque élément (\vec{r}, \vec{p}) de l'espace des phases du problème de Kepler tel que $E(\vec{r}, \vec{p}) \neq 0$, le couple (M, \vec{W}) formé d'un point $M \in Q_R \setminus \{N_R\}$, et d'un vecteur \vec{W} tangent en M à Q_R . Son image est l'ouvert dense de $T^*(Q_R \setminus \{0\})$ formé par tous les covecteurs non nuls. Son expression est

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{O}_\mu = \zeta \frac{R\sqrt{\zeta r(2m^2k - rp^2)}}{m^2k} \vec{p}, \\ h = \frac{R(rp^2 - m^2k)}{m^2k}, \\ \vec{W}_3 = \zeta \frac{m^2k \vec{r} - r(\vec{r} \cdot \vec{p}) \vec{p}}{R\sqrt{\zeta r(2m^2k - rp^2)}}, \\ \vec{W}_h = \zeta \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{R}, \end{array} \right.$$

Nous avons posé $\vec{OM} = \vec{O}_\mu + h\vec{e}_h$, $\vec{W} = \vec{W}_3 + W_h\vec{e}_h$.

Une réinterprétation des résultats de Moser (10) [Retour au Sommaire](#)

L'inverse de S^{-1} , qui sera noté S , est un difféomorphisme de l'ouvert dense de $T^*(Q_R \setminus \{N_R\})$ formé par les covecteurs non nuls sur l'ouvert de l'espace des phases du problème de Kepler formé par les éléments (\vec{r}, \vec{p}) tels que $E(\vec{r}, \vec{p}) \neq 0$. Son expression est

$$\begin{cases} \vec{p} = \frac{km^2}{\|\vec{W}\| R(R-h)} \vec{O}\mu, & \text{avec } h^2 + \zeta \|\vec{O}\mu\|^2 = R^2, \\ \vec{r} = \frac{\|\vec{W}\| R(R-h)}{km^2} \vec{W}_3 + \frac{R \|\vec{W}\| W_h}{km^2} \vec{O}\mu. \end{cases}$$

Le hamiltonien transformé $S^*E = E \circ S$ est

$$H = E \circ S = -\frac{\zeta k^2 m^3}{2R^2} \frac{1}{\|\vec{W}\|^2}.$$

Son expression donnée par le membre de droite de cette double égalité montre qu'il est défini et différentiable sur l'ouvert dense de T^*Q_R complémentaire de l'image de la section nulle, qui sera noté $(T^*Q_R)^{\neq 0}$.

Le hamiltonien transformé H est, à un facteur multiplicatif constant près, le *hamiltonien de Delauney*, c'est-à-dire le hamiltonien du problème de Kepler exprimé avec les variables actions-angles de Charles-Eugène Delauney (1816–1872), qui fut Directeur de l'Observatoire de Paris (observé par Cushman et Duistemaat).

Soient ω_1 et ω les formes symplectiques canoniques de T^*Q_R et de $T^*\mathcal{E}$, respectivement, \mathcal{X}_H et \mathcal{X}_E les champs de vecteurs hamiltoniens qui leur sont associés, le premier pour la forme symplectique ω_1 et le second pour la forme symplectique ω .

L'image réciproque de \mathcal{X}_E par le difféomorphisme S est non pas \mathcal{X}_H , mais

$$S^* \mathcal{X}_E = g \mathcal{X}_H$$

où g est la fonction différentiable ayant les deux expressions équivalentes

$$g = \frac{R}{h - R} = \frac{mk}{2} S^* \left(\frac{1}{rE(\vec{r}, \vec{p})} \right).$$

L'image réciproque $S^* \mathcal{X}_E$ du champ de vecteurs hamiltonien \mathcal{X}_E du problème de Kepler par le difféomorphisme S n'est donc pas un champ de vecteurs hamiltonien, lorsque l'ouvert de T^*Q_R sur lequel il est défini est muni de la forme symplectique ω_1 , mais un champ de vecteurs *conformément hamiltonien*, de hamiltonien $H = E \circ S$ et de facteur conforme g .

Lorsqu'on munit l'ouvert de T^*Q_R sur lequel S est défini de la forme symplectique

$$\omega_2 = S^* \omega,$$

où ω est la forme symplectique canonique de $T^*\mathcal{E}$, le champ de vecteurs $S^* \mathcal{X}_E$ est hamiltonien avec pour hamiltonien la fonction $H = S^* E = E \circ S$.

Nous avons donc

$$i(S^* \mathcal{X}_E) d\omega_1 = -g dH, \quad i(S^* \mathcal{X}_E) d\omega_2 = -dH.$$

Une réinterprétation des résultats de Moser (13) [Retour au Sommaire](#)

Soit $\Psi_{\mathcal{X}_H} : (s, (\overrightarrow{OM(0)}, \overrightarrow{W(0)})) \mapsto (\overrightarrow{OM(s)}, \overrightarrow{W(s)})$ le flot réduit du champ de vecteurs hamiltonien \mathcal{X}_H . Il a pour expression (on a posé

$$\lambda = \frac{k^2 m^3}{R^3 \|\overrightarrow{W(0)}\|^3}$$

$$\text{si } \zeta = 1 \quad \begin{cases} \overrightarrow{OM(s)} = \cos(\lambda s) \overrightarrow{OM(0)} + \frac{R}{\|\overrightarrow{W(0)}\|} \sin(\lambda s) \overrightarrow{W(0)} \\ \overrightarrow{W(s)} = -\frac{\|\overrightarrow{W(0)}\|}{R} \sin(\lambda s) \overrightarrow{OM(0)} + \cos(\lambda s) \overrightarrow{W(0)}, \end{cases}$$
$$\text{si } \zeta = -1 \quad \begin{cases} \overrightarrow{OM(s)} = \cosh(\lambda s) \overrightarrow{OM(0)} - \frac{R}{\|\overrightarrow{W(0)}\|} \sinh(-\lambda s) \overrightarrow{W(0)}, \\ \overrightarrow{W(s)} = -\frac{\|\overrightarrow{W(0)}\|}{R} \sinh(-\lambda s) \overrightarrow{OM(0)} + \cosh(\lambda s) \overrightarrow{W(0)}, \end{cases}$$

On voit que $\Psi_{\mathcal{X}_H}$ est défini pour tout $s \in \mathbb{R}$ et que \mathcal{X}_H admet $\|\overrightarrow{W}\|$ pour intégrale première.

Voici une petite propriété de géométrie symplectique qui va être appliquée à la forme symplectique $\omega_2 = S^*\omega$, définie sur l'ouvert de T^*Q_R sur lequel le difféomorphisme S est défini, et à la forme symplectique canonique ω_1 de T^*Q_R restreinte à l'ouvert $(T^*Q_R)^{\neq\{0\}}$, ainsi qu'aux champ de vecteurs \mathcal{X}_H et $g\mathcal{X}_H$.

Proposition. Soient (M, ω_1) une variété symplectique, $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ un hamiltonien différentiable, \mathcal{X}_H le champ de vecteurs hamiltonien qui lui est associé, qu'on suppose tel que son flot réduit $\Psi_{\mathcal{X}_H}$ soit complet. Soit M^0 un ouvert de M et $g : M^0 \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ une fonction différentiable partout non nulle. On suppose qu'il existe sur M^0 une autre forme symplectique ω_2 telle que

$$i(g\mathcal{X}_H)\omega_2 = -dH.$$

On suppose aussi qu'il existe une fonction différentiable $\tau : \mathbb{R} \times M^0 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour toute solution ψ de l'équation différentielle

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = g(\psi(t)) \mathcal{X}_H(\psi(t))$$

on ait

$$\frac{d}{dt} \left(\tau(t, \psi(t)) \right) = g(\psi(t)).$$

L'application $\Xi : M^0 \rightarrow M$ définie par

$$\Xi(x) = \Psi_{\mathcal{X}_H}(-\tau(0, x), x), \quad \text{où } x \in M^0,$$

est un difféomorphisme de M^0 sur un ouvert de M qui vérifie

$$\Xi^* \omega_1 = \omega_2, \quad \Xi_*(g \mathcal{X}_H) = \mathcal{X}_H.$$

Une réinterprétation des résultats de Moser (16) [Retour au Sommaire](#)

Nous allons appliquer cette proposition lorsque la variété M est l'ouvert $(T^*Q_R)^{\neq 0}$ de T^*Q_R , que ω_1 est la forme symplectique canonique de T^*Q_R et que l'ouvert M^0 de M est l'ouvert de T^*Q_R sur lequel S est défini. La fonction H , définie sur $M \equiv (T^*Q_R)^{\neq 0}$, a pour expression

$$H = -\frac{\zeta k^2 m^3}{2R^2} \frac{1}{\|\vec{W}\|^2},$$

et la fonction g , définie sur l'ouvert de T^*Q sur lequel S est défini, a pour expressions équivalentes

$$g = \frac{R}{h-R} = \frac{mk}{2} S^* \left(\frac{1}{rE(\vec{r}, \vec{p})} \right).$$

La forme symplectique ω_2 est l'image réciproque $S^*\omega$ de la forme symplectique canonique ω de $T^*\mathcal{E}$ et, puisque $g\mathcal{X}_H = S^*\mathcal{X}_E$, nous avons vu que

$$i(g\mathcal{X}_H)\omega_1 = -g dH, \quad i(g\mathcal{X}_H)\omega_2 = -dH.$$

Puisque $g\mathcal{X}_H = S^*\mathcal{X}_E$, toute courbe intégrale $t \mapsto \psi(t)$ de l'équation différentielle

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = g(\psi(t))\mathcal{X}_H(\psi(t)),$$

définie sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} , est nécessairement de la forme

$$\psi(t) = S^{-1}(\varphi(t)),$$

où $t \mapsto \varphi(t) = (\overrightarrow{r(t)}, \overrightarrow{p(t)})$ est une courbe intégrale, définie sur I , du champ de vecteurs hamiltonien \mathcal{X}_E .

Or nous avons vu que la fonction σ , définie sur $\mathbb{R} \times T^*(\mathcal{E} \setminus \{0\})$, vérifie, pour toute courbe intégrale $t \mapsto (\overrightarrow{r(t)}, \overrightarrow{p(t)})$ de \mathcal{X}_E ,

$$\frac{d\sigma(t, \overrightarrow{r(t)}, \overrightarrow{p(t)})}{dt} = \frac{1}{r(t)}.$$

Par suite la fonction

$$\tau = (\text{id}_{\mathbb{R}}, S)^* \left(\frac{mk}{2E(\vec{r}, \vec{p})} \sigma(t, (\vec{r}, \vec{p})) \right)$$

est telle que, pour toute courbe intégrale $t \mapsto \psi(t)$ du champ de vecteurs $g\mathcal{X}_H$,

$$\frac{d}{dt} \tau(t, \psi(t)) = \frac{mk}{2} S^* \left(\frac{1}{r(t)E(\vec{r}(t), \vec{p}(t))} \right) = g(\psi(t)).$$

Compte tenu de l'expression de σ on a donc, pour tout élément ψ de l'ouvert de T^*Q_R sur lequel S est défini,

$$\tau(t, \psi) = \frac{\overrightarrow{p(S(\psi))} \cdot \overrightarrow{r(S(\psi))}}{2E(\overrightarrow{r(S(\psi))}, \overrightarrow{p(S(\psi))})} - t.$$

Une réinterprétation des résultats de Moser (19) [Retour au Sommaire](#)

La proposition ci-dessus peut donc être appliquée, et montre que l'application Ξ , définie sur l'ouvert de T^*Q_R sur lequel S est défini, et à valeurs dans $(T^*Q_R)^{\neq 0}$,

$$\Xi(\psi) = \Psi_{\mathcal{X}_H}(-\tau(0, \psi), \psi)$$

où $\Psi_{\mathcal{X}_H}$ est le flot réduit du champ de vecteurs \mathcal{X}_H , est un difféomorphisme qui vérifie

$$\Xi^*\omega_1 = \omega_2, \quad \Xi_*(g\mathcal{X}_H) = \mathcal{X}_H.$$

L'application $\Xi \circ S^{-1}$ est donc un difféomorphisme de l'espace des phases du problème de Kepler $T^*(\mathcal{E} \setminus \{0\})$, restreint aux éléments d'énergie négative lorsque $\zeta = 1$, d'énergie positive si $\zeta = -1$, sur un ouvert le $(T^*Q_R)^{\neq 0}$, qui vérifie

$$(\Xi \circ S^{-1})^*\omega_1 = \omega, \quad (\Xi \circ S^{-1})_*\mathcal{X}_E = \mathcal{X}_H.$$

Cette application est le *difféomorphisme de Ligon et Schaaf*, au facteur constant R ou $1/R$ près, ce qui s'explique parce que Ligon et Schaaf ont posé $R = 1$.

Le difféomorphisme $\Xi \circ S^{-1}$ de Ligon et Schaaf fait correspondre, à chaque couple (\vec{r}, \vec{p}) de deux éléments de \mathcal{E} vérifiant $\vec{r} \neq 0$ et $E(\vec{r}, \vec{p}) \neq 0$, un couple $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{W})$ où M est un point de Q_R et \overrightarrow{W} un vecteur tangent à Q_R en ce point, vérifiant $\overrightarrow{W} \neq 0$. Posons

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\mu} + h\vec{e}_h, \quad \overrightarrow{W} = \overrightarrow{W_3} + W_h\vec{e}_h.$$

Posons aussi

$$\chi = \frac{(2m|E(\vec{r}, \vec{p})|)^{1/2}(\vec{r} \cdot \vec{p})}{m^2k}.$$

Pour alléger, nous écrivons E pour $E(\vec{r}, \vec{p})$.

Une réinterprétation des résultats de Moser (21) [Retour au Sommaire](#)

Pour $\zeta = 1$, donc $E < 0$, voici les expressions de h , W_h , $\vec{O}\mu$ et \vec{W}_3 en fonction de \vec{r} et \vec{p} .

$$\left\{ \begin{array}{l} h = \frac{R}{m^2 k} \left((rp^2 - m^2 k) \cos \chi + (2m|E|)^{1/2} \vec{r} \cdot \vec{p} \sin \chi \right), \\ W_h = \frac{1}{R} \left((2m|E|)^{-1/2} (rp^2 - m^2 k) \sin \chi - \vec{r} \cdot \vec{p} \cos \chi \right), \\ \vec{O}\mu = \frac{R}{m^2 k r} \left((2m|E|)^{1/2} r^2 \cos \chi \vec{p} + \sin \chi (m^2 k \vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{p}) r \vec{p}) \right), \\ \vec{W}_3 = \frac{1}{R} \left(r \sin \chi \vec{p} - m^2 k (2m|E|)^{-1/2} \cos \chi \left(\frac{1}{r} \vec{r} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{m^2 k} \vec{p} \right) \right). \end{array} \right.$$

Rappelons que

$$\chi = \frac{(2m|E(\vec{r}, \vec{p})|)^{1/2} (\vec{r} \cdot \vec{p})}{m^2 k}.$$

Une réinterprétation des résultats de Moser (22) [Retour au Sommaire](#)

Et voici les expressions de ces mêmes quantités lorsque $\zeta = -1$, donc que $E > 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} h = \frac{R}{m^2 k} \left((rp^2 - m^2 k) \cosh \chi - (2mE)^{1/2} \vec{r} \cdot \vec{p} \sinh \chi \right), \\ W_h = \frac{1}{R} \left(-(2mE)^{-1/2} (rp^2 - m^2 k) \sinh \chi + \vec{r} \cdot \vec{p} \cosh \chi \right), \\ \vec{O}\mu = \frac{R}{m^2 k r} \left((2mE)^{1/2} r^2 \cosh \chi \vec{p} + \sinh \chi (m^2 k \vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{p}) r \vec{p}) \right), \\ \vec{W}_3 = \frac{1}{R} \left(-r \sinh \chi \vec{p} - m^2 k (2mE)^{-1/2} \cosh \chi \left(\frac{1}{r} \vec{r} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{m^2 k} \vec{p} \right) \right). \end{array} \right.$$

Rappelons que

$$\chi = \frac{(2m|E(\vec{r}, \vec{p})|)^{1/2} (\vec{r} \cdot \vec{p})}{m^2 k}.$$

Tout comme la méthode de Moser, les difféomorphismes de Ligon et Schaaf réalisent la régularisation du problème de Kepler. Ils mettent en effet en correspondance deux courbes intégrales du champ de vecteurs hamiltonien \mathcal{X}_E , sur l'espace des phases $T^*(\mathcal{E} \setminus \{0\})$ du problème de Kepler, l'une se terminant par une collision, à une vitesse infinie, du point mobile avec le centre attractif, l'autre commençant, au même instant, par l'éjection du point mobile, à une vitesse infinie, par le centre attractif, avec une courbe intégrale sans aucune singularité du champ de vecteurs hamiltonien \mathcal{X}_H , sur la variété symplectique $(T^*Q_R)^{\neq 0}$.

Ils ont l'avantage d'utiliser comme variable indépendante le temps, à la fois pour les courbes intégrales tracées sur l'espace des phases du problème de Kepler et celles tracées sur $(T^*Q_R)^{\neq 0}$.

Cependant, l'emploi d'espaces des phases différents pour les mouvements d'énergie négative et ceux d'énergie positive a quelque chose de peu satisfaisant, car on peut faire varier de manière continue une courbe intégrale du problème de Kepler en faisant varier son énergie afin de lui faire prendre toutes les valeurs possibles.

Jean-Marie Souriau a étudié, par une autre méthode, la variété des mouvements du problème de Kepler après régularisation, qui est connexe, mais il ne s'est pas intéressé à l'existence d'un espace des phases réalisant la régularisation pour toutes les valeurs de l'énergie.

Je me demande s'il serait possible d'utiliser l'inversion (qui permet de régulariser les mouvements d'énergie nulle) afin de construire un espace des phases unique permettant de régulariser tous les mouvements, quelle que soit leur énergie. Il faudrait pour cela regarder de plus près les expressions du hamiltonien transformé pour les valeurs non nulles de l'énergie.

La famille d'algèbres de Lie des symétries infinitésimales du problème de Kepler ($\mathfrak{so}(4)$ pour les énergies négatives, $\mathfrak{e}(3)$ pour l'énergie nulle et $\mathfrak{so}(3,1)$) pour les énergies positives) constitue un type particulier d'*algèbroïde de Lie*, aussi appelé *faisceau d'algèbres de Lie*. A. Douady et M. Lazard ont prouvé que ce type particulier d'algèbroïde de Lie est intégrable. Il pourrait être intéressant de regarder si le groupoïde de Lie correspondant permet de décrire les symétries globales de l'ensemble de tous les mouvements képlériens.

Je remercie les organisateurs de cet atelier de m'avoir permis d'y présenter cet exposé.

Tous mes vœux à Alain Albouy pour la poursuite de son activité scientifique et aussi, bien sûr, pour sa vie personnelle.

Et merci aux participants qui ont eu la patience de m'écouter.

Bibliographie I

- [1] Anosov, D. V., *A note on the Kepler problem*, Journal of Dynamical and Control Systems, Vol. 8, No. 3, July 2002, 413–442.
- [2] Bernoulli, J., *Extrait de la réponse de M. Bernoulli à M. Herman, datée de Basle le 7 octobre 1710*, Histoire de l'Académie Royale des Sciences, année M.DCC.X, avec les Memoires de Mathématiques et de Physique pour la même année, (1710), pages 521–533. Disponible à l'adresse <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k34901/f707.image>.
- [3] Cushman, R. H., and Bates, L., *Global aspects of classical integrable systems*, Birkhäuser, Basel, 1997.
- [4] Cushman, R. H., and Duistermaat, J. J., *A characterization of the Ligon–Schaaf regularization map*, Comm. on Pure and Appl. Math., vol L, (1997), 773–787.

Bibliographie II

- [5] Douady, A., et Lazard, M., *Espaces fibrés en algèbres de Lie et en groupes*, Invent. Math., I (1966), 133–151.
- [6] Fock, V. A., *Zur Theorie des Wasserstoffatoms*, Zeitschrift für Physik vol. 98 (1935), 145–154.
- [7] Goodstein, D., and Feynman, R., *Feynman's lost lecture : the motion of planets around the Sun*, W.W. Norton and Company, Inc., 1994. Traduction française : Cassini, Paris, 2009.
- [8] Guichardet, A., *Le problème de Kepler ; histoire et théorie*, Éditions de l'École Polytechnique, Paris, 2012.
- [9] Györgyi, G., *Kepler's equation, Fock variables, Bacry's generators and Dirac brackets, parts I and II*, Il nuovo cimento vol. LIII A, no. 3, Febbraio 1968, 717–736 and vol. LXII A, n. 2, Luglio 1969, 449–474.

Bibliographie III

- [10] Hamilton, Sir W. R., *The hodograph or a new method of expressing in symbolic language the Newtonian law of attraction*, Proc. Roy. Irish Acad., 3 (1846) 344–353. In Sir William Rowan Hamilton mathematical Works, vol. II, 287–294, Cambridge University Press, 1940.
- [11] Herman, J. , *Extrait d'une lettre de M. Herman à M. Bernoulli, datée de Padoüe le 12 juillet 1710*, Histoire de l'Académie Royale des Sciences, année M.DCC.X, avec les Memoires de Mathématiques et de Physique pour la même année, (1710), pages 519–521. Disponible à l'adresse <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k34901/f709.image>.
- [12] Levi-Civita, T, *Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps*, Acta Math. 30 (1906), 306–327.

Bibliographie IV

- [13] Ligon, T., and M. Schaaf, M., *On the global symmetry of the classical Kepler problem*, Rep. Math. Phys. 9 (1976), 281–300.
- [14] Marle, C.-M., *A property of conformally Hamiltonian vector fields; application to the Kepler problem*, Journal of Geometric Mechanics, Volume 4, Number 12, June 2012, 181-206.
- [15] Milnor, J., *On the Geometry of the Kepler problem*, Amer. Math. Monthly, **90** (1983), 353–365.
- [16] Moser, J., *Regularization of Kepler's problem and the averaging method on a manifold*, Commun. pure appl. math. vol. 23 (1970), 609–636.
- [17] Souriau, J.-M., *Géométrie globale du problème à deux corps*, in *Modern developments in analytical mechanics*, Supplemento al vol. **117**, Atti della Accademia della Scienze di Torino, (1983), 369–418.